DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2016. 06. 009

$|x|$ 在 Newman 结点组的有理插值*

张慧明[1]，李建俊[2]
（1. 河北地质大学数理学院，河北 石家庄 050031；
2. 河北师范大学附属民族学院，河北 石家庄 050091）

摘　要：研究 Newman 型有理算子逼近 $|x|$ 的收敛速度，在 Newman 结点组的零点附近 $[0,e^{-\sqrt{n}}]$ 增加结点。通过对 Newman 不等式进行改进，得到确切的逼近阶为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}\right)$，这个结果优于 Newman 的经典结果。进一步说明：在零点附近增加结点可以提高原来的逼近阶。

关键词：Newman 结点；Newman 型有理算子；Newman 不等式；有理插值；逼近阶
中图分类号：O174. 41　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 - 6579（2016）06 - 0064 - 04

On rational interpolation to $|x|$ at the Newman nodes

ZHANG Huiming[1], *LI Jianjun*[2]
（1. School of Mathematics & Physics, Hebei GEO University, Shijiazhuang 050031, China;
2. Affiliated College of Minority Education, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050091, China）

Abstract: The rate of convergence for Newman-type rational interpolation to $|x|$ is studied, and nodes near the zero of the Newman nodes are increased. Through the improvement of Newman's inequality, it is proved that the exact order of approximation is $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}\right)$, the result is better than the classical results of Newman. Further explanation: increases nodes in the near zero can improve the approximation order of the original.

Key words: Newman nodes; Newman-type rational operators; Newman inequality; rational interpolation; order of approximation.

众所周知，最早研究 $|x|$ 的逼近问题是 Bernstein。他在 1913 年用代数多项式对 $|x|$ 进行逼近，得到 n 次代数多项式对 $|x|$ 的逼近阶 $E_n(|x|) = O\left(\frac{1}{n}\right)$，且不能改善（Acta Math., 1913, 37: 1 -57）。

1964 年，Newman 发现 $R_n(|x|) = \max_{|x|\leqslant 1}\{||x| - r_n(x)|\}$ 远远优于其多项式的最佳逼近 $E_n(|x|)$（Mich. Math. J., 1964, 11: 11 - 14）。设 $p(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x + a^k)$，其中 $a = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$。定义了如下有理函数 $r_n(x) = x\frac{p(x) - p(-x)}{p(x) + p(-x)}$。建立了如下定理：当 $n \geqslant 5$ 时，有 $\frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}} \leqslant R_n(|x|) \leqslant 3e^{-\sqrt{n}}$。

1997 年，Brutman 等[1]把上述有理函数进行推广：

结点组取 $X = \{x_k: k = 1,2,\cdots,n, 0 < x_1 < x_2$

* **收稿日期：**2016 - 05 - 06
基金项目：河北省高等学校科学技术研究青年基金资助项目（QN2014018）
作者简介：张慧明（1978 年生），男；**研究方向：**函数逼近论；E-mail：zhanghm1978@126. com

$< \cdots < x_n \leqslant 1\}$。令 $p(x) = \prod_{k=1}^{n}(x + x_k)$，则基于结点组 $\{-x_n,\cdots,-x_2,-x_1,0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的 Newman 型有理算子定义为

$$r_n(X;x) = x\frac{p(x) - p(-x)}{p(x) + p(-x)}$$

在 Newman 之后，有不少学者考虑在任意结点组（见文献［2－14］）上的 Newman 型插值。特别是近十几年，研究与 Newman 结点组相关的问题也较多。

2004 年，谢庭藩等[2]将以上不等式改善为：$R_n(|x|) = \frac{C}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}} + O\left(\frac{1}{ne^{\sqrt{n}}}\right)$，其中

$$C = \max_{0\leqslant |x|<\infty}\left\{\frac{x}{1+e^x}\right\} = 0.278\,46\cdots$$

2006 年，谢庭藩等[3]通过改进不等式的证明技巧，利用 Newman 结点组对逼近阶做进一步提高，得到一个较好的结果

$$R_s(|x|) = C\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}} + n^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{\pi^2\sqrt{n}}{4}\right)\right)$$

其中 C 为正常数，$s \geqslant n \geqslant 1$。

2010 年，詹倩等[4]通过改进 Newman 结点组和证明方法得到一个更好的结果 $R_n(|x|) = C'n^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{n}}{2}\right)$，其中 C' 为正常数。

2015 年，詹倩等[5]构造一类分段加密的新结点组，得到 Newman 型有理算子逼近 $|x|$ 的上界为 $\exp\left(-\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{3+\varepsilon}}\right)$，其中 $\varepsilon > 0$ 仅与 n 有关，并随 n 增大无限接近于 0。近两年，张慧明等[15－17]还研究了 $|x|^\alpha(0<\alpha<1)$ 和 $(1<\alpha\leqslant 2)$ 的有理插值。

本文在 $[0,e^{-\sqrt{n}}]$ 增加 $n/2$（在这里 n 取偶数）个结点 $\{x_k = e^{-\frac{k}{\sqrt{n}}}\}_{k=n+1}^{3n/2}$，即研究插值结点组取加密的 Newman 结点组 $N = \{x_k = e^{-\frac{k}{\sqrt{n}}}\}_{k=1}^{3n/2}$ 的 Newman 型有理插值算子逼近 $|x|$，得到逼近阶为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}\right)$。

1　$r_{3n/2}(N;x)$ 在加密 Newman 结点组对 $|x|$ 的有理逼近

由于构造的结点组里有 $3n/2$ 个结点，为了方便，把 $3n/2$ 记作 m，所以把 Newman 型有理算子定义为：

$$r_m(N;x) = x\frac{p(x) - p(-x)}{p(x) + p(-x)}$$

定理 1　结点组取加密的 Newman 结点组，当 $n \geqslant 38$ 时，有下式成立：

$$|e_m(N;x)| = ||x| - r_m(N;x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}\right)$$

证明本定理前先对 Newman 不等式进行改善：

引理 1　当 $n \geqslant 38$ 时，有

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-a^k}{1+a^k} \leqslant \prod_{k=1}^{n/2-1}\frac{1-a^k}{1+a^k} \leqslant e^{-1.6\sqrt{n}}$$

证明　对上式左端估计得

$$\prod_{k=1}^{n/2-1}\frac{1-a^k}{1+a^k} \leqslant \exp\left(-2\sum_{k=1}^{n/2-1}a^k\right) = \exp\left(-2\frac{a-a^{n/2}}{1-a}\right)$$

当 $n \geqslant 38$ 时，有

$$2(a - a^{n/2}) \geqslant 2(e^{-\frac{1}{\sqrt{37}}} - e^{-\frac{\sqrt{37}}{2}}) \geqslant 1.6$$

另一方面，$\frac{1}{1-a} \geqslant \sqrt{n}$。由以上三式引理得证。

引理 2[1]　令 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant 1$，$A_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$，当 $x \in [-x_1,x_1]$ 时，有 $|e_n(X;x)| \leqslant \frac{1}{A_n}$。

引理 3[9]　当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时，有 $\frac{1-x}{1+x} > 3^{-2x}$。

下面证明定理 1。

证明　由于 $r_m(N;x)$ 和 $|x|$ 都是偶函数，只考虑区间 $[0,1]$ 即可。

（i）当 $0 \leqslant x \leqslant x_m = \exp\left(-\frac{3n}{2\sqrt{n}}\right) = \exp\left(-\frac{3\sqrt{n}}{2}\right)$ 时，

$$A_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a^k} = \sum_{k=1}^{3n/2}\exp\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\exp\left(\frac{3n}{2\sqrt{n}}\right) - 1}{1 - \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \geqslant \sqrt{n}\left(\exp\left(\frac{3\sqrt{n}}{2}\right) - 1\right)$$

由引理 2 得

$$|e_m(N;x)| \leqslant \frac{1}{A_m} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}\left(\exp\left(\frac{3\sqrt{n}}{2}\right) - 1\right)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}\exp\left(\frac{3\sqrt{n}}{2}\right)}$$

（ii）当 $x_m = e^{-\frac{3\sqrt{n}}{2}} \leqslant x \leqslant x_n = e^{-\frac{n}{\sqrt{n}}} = e^{-\sqrt{n}}$ 时，则对于某个 j，有 $x_{j+1} = a^{j+1} \leqslant x \leqslant x_j = a^j$ $(j = n, n+1,\cdots,3n/2-1)$。

$$|h_m(N;x)| = \left|\frac{p(-x)}{p(x)}\right| = \prod_{k=1}^{m}\left|\frac{a^k - x}{a^k + x}\right| = \prod_{k=1}^{n}\frac{a^k - x}{a^k + x}\prod_{k=n+1}^{j}\frac{a^k - x}{a^k + x}\prod_{k=j+1}^{m}\frac{x - a^k}{x + a^k} \leqslant$$

$$\prod_{k=n+1}^{j}\frac{a^k-x}{a^k+x}\prod_{k=j+1}^{m}\frac{x-a^k}{x+a^k}\leqslant$$

$$\prod_{k=n+1}^{j}\frac{a^k-a^m}{a^k+a^m}\prod_{k=j+1}^{m}\frac{a^j-a^k}{a^j+a^k}=$$

$$\prod_{k=n+1}^{j}\frac{1-a^{m-k}}{1+a^{m-k}}\prod_{k=j+1}^{m}\frac{1-a^{k-j}}{1+a^{k-j}}\leqslant\prod_{k=1}^{n/2-1}\frac{1-a^k}{1+a^k}$$

由引理 1 得 $|h_m(N;x)|\leqslant e^{-1.6\sqrt{n}}\leqslant\frac{4}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}$。

（iii）当 $x_n=e^{-\sqrt{n}}\leqslant x\leqslant 1$ 时，对于某个 j，有 $x_{j+1}=a^{j+1}\leqslant x\leqslant x_j=a^j(j=0,1,\cdots,n-1)$。

$$|h_m(N;x)|=\left|\frac{p(-x)}{p(x)}\right|=\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{a^k-x}{a^k+x}\right|=$$

$$\prod_{k=1}^{j}\frac{a^k-x}{a^k+x}\prod_{k=j+1}^{n-1}\frac{x-a^k}{x+a^k}\prod_{k=n}^{m}\frac{x-a^k}{x+a^k}\leqslant$$

$$\prod_{k=1}^{j}\frac{a^k-x}{a^k+x}\prod_{k=j+1}^{n-1}\frac{x-a^k}{x+a^k}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-a^k}{1+a^k}$$

由引理 1 得 $|h_m(N;x)|\leqslant e^{-1.6\sqrt{n}}\leqslant\frac{4}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}$。

由情形（ii）－（iii）得

$$|e_m(N;x)|=\left|\frac{2xp(-x)}{p(x)+p(-x)}\right|\leqslant\frac{2}{\left|\frac{p(x)}{p(-x)}\right|-1}\leqslant$$

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}{4}-1}\leqslant\frac{8}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}-4}\leqslant\frac{9}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}$$

综合上面三种情形有

$$|e_m(N;x)|=\big||x|-r_m(N;x)\big|=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}\right)$$

下面说明这个逼近阶是确切的，有以下定理。

定理 2 取 $x^*=\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}$，那么有

$$|e_m(N;x^*)|\geqslant\frac{1}{13\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}$$

证明 当 $n\geqslant 38$ 时，有 $\frac{x^*}{a^k}\leqslant\frac{x^*}{a^m}=\frac{x^*}{e^{-\frac{3n}{2\sqrt{n}}}}<\frac{1}{2}$

且 $0\leqslant h_m(N;x^*)=\frac{p(-x^*)}{p(x^*)}\leqslant 1$，其中

$$|h_m(N;x^*)|=\prod_{k=1}^{m}\frac{a^k-x^*}{a^k+x^*}=\prod_{k=1}^{3n/2}\frac{1-x^*/a^k}{1+x^*/a^k}$$

由引理 3 得

$$|h_m(N;x^*)|\geqslant 3^{-2x^*\left(\sum_{k=1}^{3n/2}\exp\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{3n/2}\exp\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\exp\left(\frac{3n}{2\sqrt{n}}\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=$$

$$\frac{\exp\left(\frac{3n}{2\sqrt{n}}\right)-1}{1-\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\leqslant\exp\left(\frac{3n}{2\sqrt{n}}\right)(\sqrt{n}+1)$$

由上式得

$$|h_m(N;x^*)|\geqslant 3^{-2\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}}\geqslant\frac{1}{13}$$

从而

$$\sqrt{n}\exp\left(\frac{3\sqrt{n}}{2}\right)|e_m(N;x^*)|=\frac{2h_m(N;x^*)}{1+h_m(N;x^*)}\geqslant$$

$$h_m(N;x^*)\geqslant 1/13$$

定理得证。

由定理 1 和定理 2 综合可得：

$$\frac{1}{13\sqrt{n}\exp\left(\frac{3\sqrt{n}}{2}\right)}\leqslant|e_m(N;x^*)|\leqslant\frac{9}{\sqrt{n}\exp\left(\frac{3\sqrt{n}}{2}\right)}$$

由此得到的确切逼近阶为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\exp\left(\frac{3\sqrt{n}}{2}\right)}\right)$。

2 分析总结

综上所述，在零点附近 $[0,e^{-\sqrt{n}}]$ 增加 $n/2$（n 取偶数）个结点，即研究插值结点组取加密的 Newman 结点组 $N=\{x_k=\exp(-k/\sqrt{n})\}_{k=1}^{3n/2}$ 的 Newman 型有理插值算子逼近 $|x|$，得到确切逼近阶为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}e^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}}\right)$。这个结果优于 Newman 的经典结果；这个结果略好于文［2］的结果及文［3］的结果（当 $n\leqslant s<3n/2$ 时），且形式简洁；由于詹倩等[4]是通过改进的 Newman 结点组，所以略优于本文结果；这个结果虽不及文［5］的结果好，但是这个结果远远优于文［6－14］中的结果。

另一方面，本文是通过在零点（唯一奇点）附近增加结点来提高逼近阶。进一步说明结论：在零点附近增加结点可以提高原来的逼近阶[14]。

参考文献：

［1］ BRUTMAN L, PASSOW E. On rational interpolation to $|x|$［J］. Constr Approx, 1997, 13: 381－391.

［2］ XIE T F, ZHOU S P. The asymptotic property of approximation to $|x|$ by Newman rational operators［J］. Acta Math Hungar, 2004, 103: 313－319.

［3］ XIE T F, ZHOU X L. Improvement of Newman inequality［J］. J Math Anal Appl, 2006, 315: 359－366.

（下转第 73 页）

推论 1　设树 H 有 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号，树 T 是集有序优美树，且其顶点集二部划分 (X, Y) 满足 $||X|-|Y||\leqslant 1$，则对称树 $<T; H>$ 具有 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号。

参考文献：

[1] ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E. Every lobster is odd-elegant [J]. Information Processing Letters, 2013, 113 (1/2): 30 - 33.

[2] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J/OL]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2015, DS6. http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/viewFile/DS6/pdf.

[3] BACA M, BERTAULT F, MACDOUGALL J A, et al. Vertex-antimagic total labelings of graphs [J]. Discuss. Math Graph Theory, 2003, 23(1): 67 - 83.

[4] 唐保祥，任韩. 2 类优美图的冠的优美标号[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2015，54(5)：24 - 27.

[5] 魏丽侠，张坤龙. 几类并图的优美性[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2008，47(3)：10 - 13.

[6] 吴跃生. 图 $F_{n,4}(r_1, r_2, \cdots, r_{3n+1})$ 的交错标号[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2016，55(4)：11 - 14.

[7] YAO B, CHENG H, YAO M, et al. A note on strongly graceful trees [J]. Ars Combinatoria, 2009, 92: 155 - 169.

[8] ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E, et al. A proof to the odd-gracefulness of all lobsters [J]. Ars Combinatoria, 2012, 103: 13 - 18.

[9] WANG H Y, YAO B, YAO M. Generalized edge-magic total labellings of models from reseaching networks [J]. Information Sciences, 2014, 279: 460 - 467. DOI:10.1016/j.ins.2014.03.132.

[10] WANG H Y, YAO B, YANG C, et al. Edge-magic total labellings of some network models [J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 347 - 350: 2752 - 2757. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.347 - 350.2752.

[11] WANG H Y, YAO B, YANG C, et al. Labelling properties of models related with complex networks based on constructible structures [J]. Advanced Materials Research, 2013 (765/766/767): 1118 - 1123. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.765/766/767.1118.

[12] 赵喜杨，马飞，姚兵. 一类强优美标号树[J]. 吉林大学学报(理学版)，2016，54(2)：222 - 228.

(上接第 66 页)

[4] ZHAN Q, XU S S, ZHANG Y H. Asymptotic property of approximation to $x^{\alpha}\mathrm{sgn}x$ by Newman type operators [J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2010, 26(4): 617 - 624.

[5] 詹倩，许树声. 基于一类新结点集的 Newman 型有理插值算子[J]. 数学进展，2015，44(5)：757 - 764.

[6] WERNER H. Rational interpolation von $|x|$ in äquidistanten Punkten [J]. Math Z, 1982, 180: 11 - 17.

[7] BRUTMAN L, PASSOW E. Rational interpolation to $|x|$ at the Chebyshev nodes [J]. Bull Austral Math Soc, 1997, 56: 81 - 86.

[8] BRUTMAN L. On rational interpolation to $|x|$ at adjusted Chebyshev nodes [J]. J Approx Theory, 1998, 95: 146 - 152.

[9] HAN X L. On the order of approximation for the rational interpolation to $|x|$ [J]. Approximation Theory and Its Applications, 2002, 18(2): 58 - 64.

[10] 张慧明，李建俊. $|x|$ 在第二类 Chebyshev 结点的有理逼近[J]. 郑州大学学报(理学版)，2010，42(2)：1 - 3.

[11] ZHU L Y, DONG Z L. On Newman-type rational interpolation to $|x|$ at the Chebyshev nodes of the second kind [J]. Analysis in Theory and Applications, 2006, 22(3): 262 - 270.

[12] 张慧明，李建俊，段继光. $|x|$ 在调整的第二类 Chebyshev 结点组的有理插值[J]. 数学杂志，2014，34(3)：509 - 514.

[13] 张慧明，门玉梅，李建俊. $|x|$ 在正切结点组的有理插值[J]. 天津师范大学学报(自然科学版)，2011，31(4)：5 - 6.

[14] 张慧明，段生贵，李建俊，等. $|x|$ 的有理插值[J]. 高等学校计算数学学报，2016，38(1)：52 - 59.

[15] 张慧明，李建俊. $|x|^{\alpha}$ 在 Chebyshev 结点的有理插值[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2016，33(4)：491 - 495.

[16] 张慧明，段生贵，李建俊. $|x|^{\alpha}$ 在第二类 Chebyshev 结点的有理插值[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2015，38(6)：889 - 892.

[17] 张慧明，段生贵，李建俊. $|x|^{\alpha}$ $(1\leqslant\alpha<2)$ 在等距结点的有理插值[J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2016，50(1)：21 - 23.